Μαθημα 7ο 27/10/2016

Πιθανοτητες

Τυχαια μεταβλητη - Κατανομης

παραδειγμα 1:

Ριψη Ζαριου

$S = \{$ ⚀ , ⚁ , ..., ⚅ $\}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad X \quad \downarrow$ — κανω την αντιστοιχιση αυτη για να διευκολυνθω εγω

$S_x = \{1, 2, \ldots, 6\}$

παραδειγμα 2:

Φοιτητης → 3 ερωτησεις

καθε ερωτηση → Σ / Λ

$S = \{ΛΛΛ, \underbrace{ΛΛΣ, ΛΣΛ, ΣΛΛ}, \underbrace{ΣΣΛ, ΣΛΣ, ΛΣΣ}, ΣΣΣ\}$ — αντιστοιχιση

$S_x = \{0, 1, 2, 3\}$

X = Αριθμος σωστων απαντησεων

Φοιτητης κερδιζει 1 μοναδα για καθε σωστη απαντηση και χανει 1 μοναδα για καθε λαθος απαντηση

Y = Κερδος φοιτητη

$S = \{ΛΛΛ, \underbrace{ΛΛΣ, ΛΣΛ, ΣΛΛ}, \underbrace{ΣΣΛ, ΣΛΣ, ΛΣΣ}, ΣΣΣ\}$ — αντιστοιχιση

$S_Y = \{-3, -1, 1, 3\}$

παραδειγμα 3:
Νομισμα ριχνεται μεχρι να εμφανιστει για πρωτη φορα "Κ"

$$S = \{ Κ, ΓΚ, ΓΓΚ, \ldots, \underbrace{ΓΓ \ldots Γ}_{ν-1\ (Γ)}Κ, \ldots \}$$

Z = Πληθος επαναληψεων μεχρι να εμφανιστει $1^η$ φορα Κ

$$S_Z = \{ 1, 2, 3, \ldots, ν, \ldots \}$$

⊛ Πρωτη προσεγγιση Ορισμου τυχαιας μεταβλητης (τ.μ)
Τυχαια μεταβλητη ειναι καθε συναρτηση απο τον αρχικο δειγματικο χωρο S στο συνολο των πραγματικων $\mathbb{R}$

→ Οι τυχαιες μεταβλητες συμβολιζονται: $X, Y, Z, \ldots$
→ Οι τιμες τ.μ συμβολιζονται: $x, y, z, \ldots$

Ερωτημα:
Μπορει η τυχαια μεταβλητη να χρησιμοποιηθει για υπολογισμο πιθανοτητων ή εχει νοημα να ενδιαφερθω για πιθανοτητα η τ.μ να παρει καποια συγκεκριμενη της τιμη?

Συνέχεια παραδ. 2: Με τ.μ

τ.μ : Y = κέρδος φοιτητή

τιμή Y: −3, −1, 1, 3

$P(Y=-3) = P(ΛΛΛ) = \frac{1}{8}$

$P(Y=-1) = P(ΛΛΣ, ΛΣΛ, ΣΛΛ) = \frac{3}{8}$

$P(Y=1) = P(ΣΣΛ, ΣΛΣ, ΛΣΣ) = \frac{3}{8}$

$P(Y=3) = P(ΣΣΣ) = \frac{1}{8}$

$P(\text{κερδίζει}) = P(Y=1 \text{ ή } Y=3) = \frac{4}{8}$

Συνέχεια παραδ 3: Με τ.μ

τ.μ : Z = πλήθος επαναλήψεων μέχρι να εμφανιστεί 1η φορά Κ

τιμή Z : 1, 2, 3, ..., ν, ...

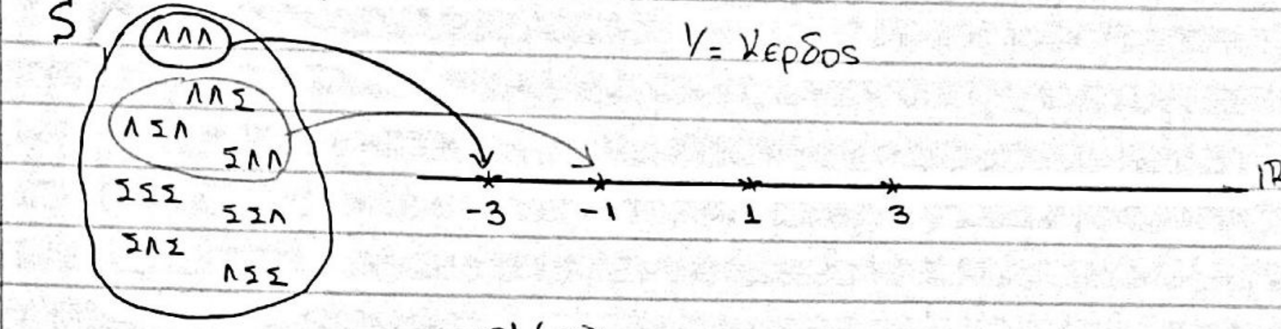
$P(Z=1) = P(K) = p$

$P(Z=2) = P(ΓK) = P(Γ)\cdot P(K) \underset{\text{Ανεξαρτησία}}{=} (1-p)\cdot p$

$\vdots$

$P(Z=\nu) = P(\underbrace{Γ \ldots Γ}_{(\nu-1)}K) \overset{\text{Ανεξαρτησία}}{=} \underbrace{P(Γ)\cdot \ldots \cdot P(Γ)}_{(\nu-1)}\cdot P(K) = p(1-p)^{\nu-1}$

Παλι στο Παραδ 2:



$X^{-1}(B)$

Ορισμος

Εστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π. Μια συναρτηση $X: S \to \mathbb{R}$ λεγεται τυχαια μεταβλητη αν για καθε B (Borel) υποσυνολο του $\mathbb{R}$ η

$$X^{-1}(B) = \{ s \in S : X(s) \in B \} \in \mathcal{A}$$

Ορισμος {Αθροιστικης Συναρτησης Κατανομης (α.σ.κ)}

Εστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χ.π. Η αθροιστικη συναρτηση κατανομης συμβολιζεται με $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και οριζεται απο τον εξης τυπο:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\begin{matrix}\text{ολων των τιμων της} \\ \text{τ.μ } X \text{ που ειναι}\end{matrix} \leq x\right)$$

Παρατηρησεις

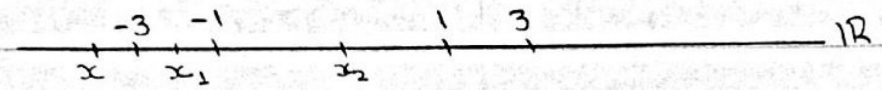
① Το πεδιο τιμων της F_X ειναι το $[0,1]$

② Αν η F_X ειναι γνωστη προφανως μπορω να υπολογισω πιθανοτητες της μορφης $P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$. Μπορω ομως να υπολογισω και πιθανοτητες της μορφης $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

παραδειγμα □:

τ.μ X με τιμες $x=-3,-1,1,3$ και αντιστοιχης πιθανο-
τητας: $P(X=-3)=P(X=3)=\frac{1}{8}$, $P(X=-1)=P(X=1)=\frac{3}{8}$

$$F_X(x)=?$$



Αν $x<-3$ τοτε $F_X(x)\overset{\text{ορ}}{=}P(X\leq x)=P(\varnothing)=0$

Αν $-3\leq x<-1$ τοτε $F_X(x)\overset{\text{ορ}}{=}P(X\leq x)=P(X=-3)=\frac{1}{8}$

Αν $-1\leq x<1$ τοτε $F_X(x)\overset{\text{ορ}}{=}P(X\leq x)=P(X=-3$ ή $X=-1)=$

$=P(X=-3)+P(X=-1)=\frac{4}{8}$ ∪ : ενωση

Αν $1\leq x<3$ τοτε $F_X(x)\overset{\text{ορ}}{=}P(X\leq x)=P(X=-3$ ή $X=-1$ ή $X=1)=$

$=P(X=-3)+P(X=-1)+P(X=1)=\frac{7}{8}$

Αν $x\geq 3$ τοτε $F_X(x)\overset{\text{ορ}}{=}P(X\leq x)=$

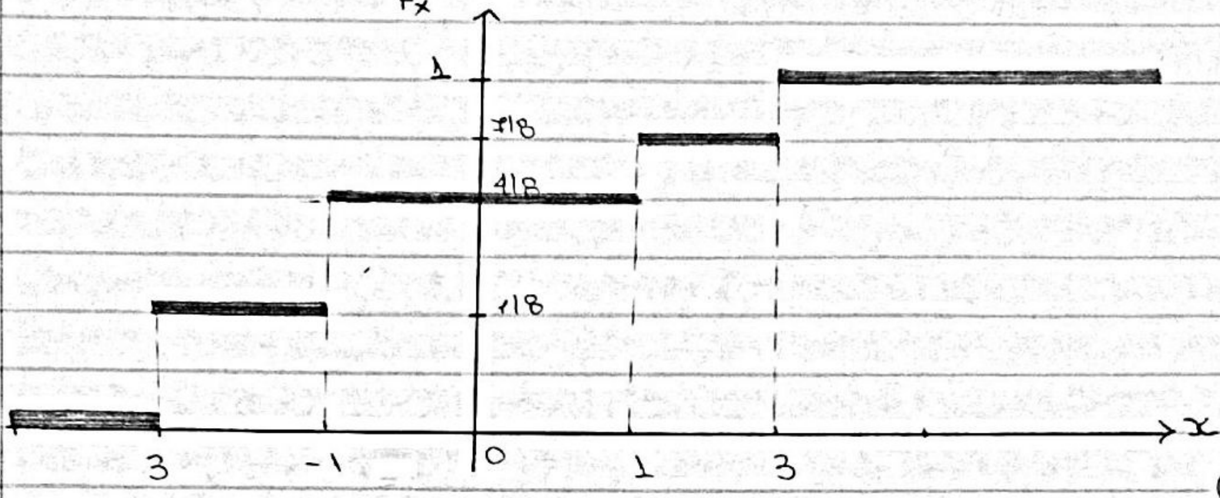
$=P(X=-3$ ή $X=-1$ ή $X=1$ ή $X=3)=$

$=P(X=-3)+P(X=-1)+P(X=1)+P(X=3)=1$

Συνεπως εχουμε:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-3\\ 1/8, & -3\leq x<-1\\ 4/8, & -1\leq x<1\\ 7/8, & 1\leq x<3\\ 1, & 3\leq x\end{cases}$$

→ Σχεδιαζουμε την γραφικη παρασταση

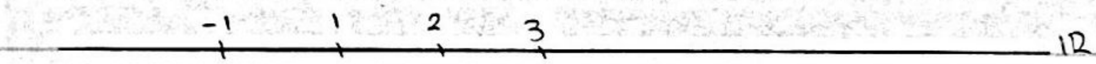


Παραδειγμα

τ.μ X με τιμες $x = -1, 1, 2, 3$

$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{4}$, $P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3}$

$F_X(x) = ?$



Αν $x < -1$ τοτε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$

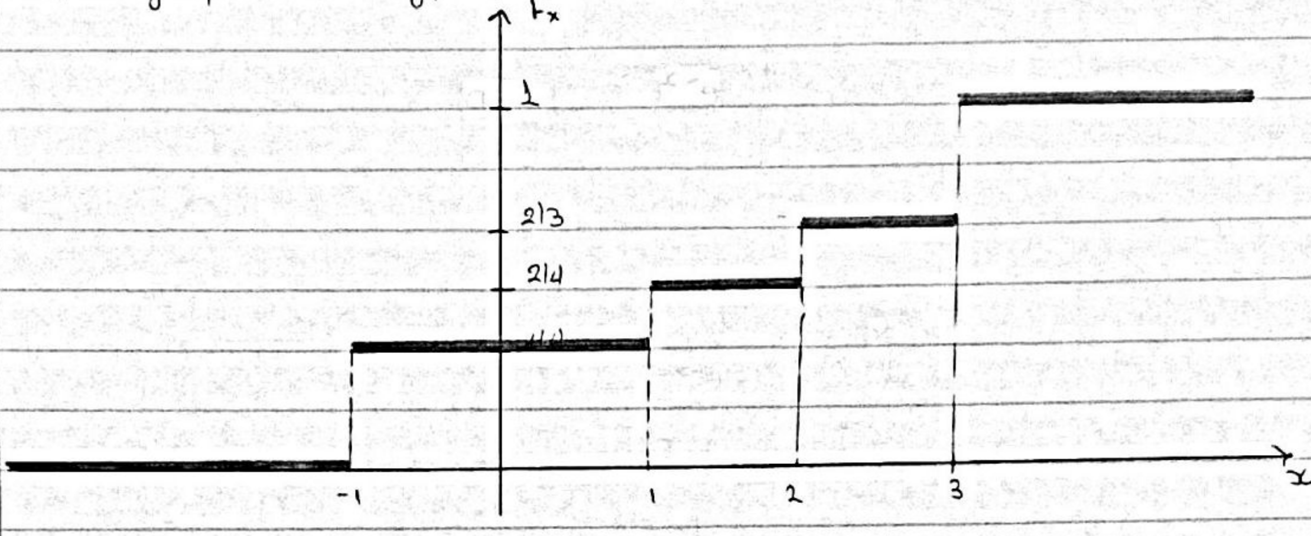
Αν $-1 \leq x < 1$ τοτε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(X=-1) = 1/4$

Αν $-1 \leq x < 2$ τοτε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(X=-1) + P(X=1) =$
$= 2/4$

Αν $2 \leq x < 3$ τοτε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(X=-1) + P(X=1) +$
$+ P(X=2) = 2/4 + 1/6 = 2/3$

Αν $3 \leq x$ τοτε $F_X(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \leq x) = P(X=-1) + P(X=1) +$
$+ P(X=2) + P(X=3) = 1$

→ Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση



Ιδιότητες της α.σ.κ

Πρόταση

Αν F_X είναι α.σ.κ της τ.μ X, τότε

① Η F_X είναι αύξουσα

② Η F_X είναι συνεχής από δεξιά, δηλ.

$F_X(a+) \overset{\text{ορ}}{=} \lim_{n\to\infty} F_X\left(a+\frac{1}{n}\right) = F_X(a)$

③ $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τα ①, ②, ③ είναι α.σ.κ

Απόδειξη

① Αρκεί αν $x \le y$ τότε $F_X(x) \le F_X(y)$

Έστω $x \le y$ ———— x ———— y ———— $\mathbb{R}$

Τότε $\{X \le x\} \subseteq \{X \le y\} \Rightarrow P(X \le x) \le P(X \le y) \Rightarrow$

$F_X(x) \le F_X(y)$

παραδειγμα

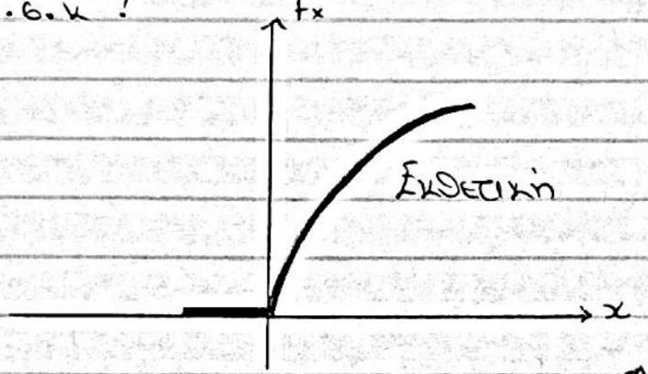
Ειναι οι

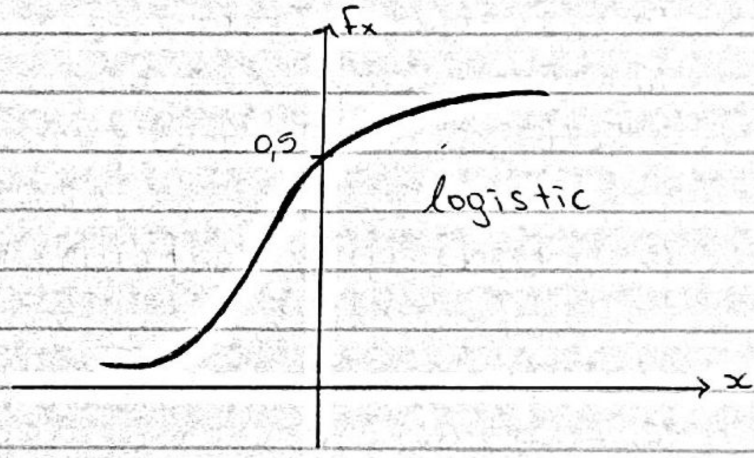
$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

και

$$F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad , x \in \mathbb{R}$$

α.σ.κ ?





Πρόταση

Έστω τ.μ X με α.σ.κ F_X και έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε:

α) $P(\alpha < X \le \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha)$

β) $P(X < \beta) = F_X(\beta -) \overset{\text{ορ}}{=} \lim_{n \to \infty} F_X(\beta - \frac{1}{n})$

γ) $P(X = \beta) = F_X(\beta) - F_X(\beta -)$

δ) $P(X > \beta) = 1 - F_X(\beta)$

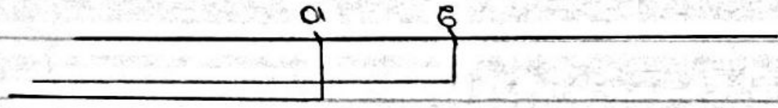
ε) $P(\alpha \le X \le \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha -)$

στ) $P(\alpha < X < \beta) = F_X(\beta -) - F_X(\alpha)$

ζ) $P(\alpha \le X < \beta) = F_X(\beta -) - F_X(\alpha -)$

Απόδειξη

α) $\{X \le \beta\} = \{X \le \alpha\} \cup \{\alpha < X \le \beta\}$



Τότε έχουμε:

$$P(X \le \beta) = P(X \le \alpha) + P(\alpha < X \le \beta)$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο

παραδειγμα

Θεωρω τ.μ X με α.σ.κ

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ x^2 & , 0 \le x < 1/3 \\ 1/4 & , 1/3 \le x < 2 \\ \frac{(x-1)}{4} & , 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

Να υπολογιστουν οι πιθανοτητες

$P\left(\frac{1}{3} < X \le 3\right)$, $P(X = 1/3)$, $P(X=2)$, $P\left(1 \le X \le \frac{5}{2}\right)$,

$P\left(X < \frac{1}{3}\right)$, $P(X=3)$, $P(X>2)$

λυση

$P\left(\frac{1}{3} < X \le 3\right) = F_X(3) - F_X\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(X = 1/3) = F_X\left(\frac{1}{3}\right) - F_X\left(\frac{1}{3}-\right) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \ldots$

$P(X=2) = F_X(2) - F_X(2-) = \frac{2-1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

$P(1 \le X \le 5/2) = F_X\left(\frac{5}{2}\right) - F_X(1-) = \frac{2{,}5-1}{4} - \frac{1}{4} = \ldots$

$P(X < 1/3) = F_X\left(\frac{1}{3}-\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$P(X=3) = F_X(3) - F_X(3-) = 1 - \frac{3-1}{4} = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(X>2) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{2-1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Παρατηρηση

Αν το a ειναι σημειο συνεχειας της F_X, τοτε

$$F_X(a-) = F_X(a+) = F_X(a)$$

Πως διαμορφωνεται η προταση οταν τα a, b ειναι σημεια συνεχειας της F_X?

$P(X=b)=0$

$P(X<b)=F_X(b)$

$$P(a<X\leq b) = P(a\leq X<b) = P(a<X<b) = P(a\leq X\leq b) =$$
$$= F_X(b) - F_X(a)$$